

Вступительный экзамен в Школу анализа данных. 10 июня 2012г.

1. Даны 2012 гирек разной массы. Они разбиты на две группы (по 1006 в каждой), внутри которых упорядочены по массе. Предложите способ за 11 взвешиваний найти 1006-ую гирьку по массе среди всех.
2. Вычислите $\int_0^{2\pi} (\sin x)^8 dx$.
3. Докажите, что многочлен с действительными коэффициентами, принимающий на действительной оси только положительные значения, может быть представлен в виде суммы квадратов многочленов с действительными коэффициентами.
4. Какую наибольшую дисперсию может иметь случайная величина, принимающая значения в отрезке от 0 до 1?
5. В множестве из n человек каждый может знать или не знать другого (если A знает B , отсюда не следует, что B знает A). Все знакомства заданы булевой матрицей $n \times n$. В этом множестве может найтись или не найтись знаменитость — человек, который никого не знает, но которого знают все. Предложите алгоритм, который бы находил в множестве знаменитость или говорил, что ее в этом множестве нет. Сложность по времени — $O(n)$, сложность по памяти — $O(1)$.
6. Рассмотрим случайную перестановку на n элементах. Докажите, что данные k элементов окажутся в одном цикле с вероятностью $\frac{1}{k}$.
7. Есть неизвестная нам квадратичная форма Q в n -мерном пространстве. Разрешается задавать вопрос вида «Чему равно $Q(v)$?». Какое минимальное число вопросов надо задать, чтобы определить, является ли форма Q положительно определенной?